Solución: Se puede observar que en esta ecuación el numerador del miembro de la derecha se obtiene al multiplicar el numerador del miembro de la izquierda por $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. Tal observación sugiere multiplicar el numerador y el denominador del miembro de la izquierda por dicho factor. Se obtiene así:

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \quad \text{según (6)}.$$

Ejemplo 4: Demostrar que

$$\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta$$

es una identidad.

Solución: El miembro de la derecha de la ecuación propuesta es factorizable. Se obtiene así:

$$\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta \quad \text{según (6)}$$

EJERCICIO 3.2

Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones es una identidad.

1. $\cos A(\sec A - \cos A) = \operatorname{sen}^2 A$.
2. $\cot A(\tan A + \cot A) = \csc^2 A$.
3. $\sec A(\sec A - \cos A) = \tan^2 A$.
4. $\operatorname{sen} A(\csc A - \operatorname{sen} A) = \cos^2 A$.
5. $(\csc A + 1)(\csc A - 1) = \cot^2 A$.
6. $(1 - \operatorname{sen} A)(1 + \operatorname{sen} A) = \cos^2 A$.
7. $(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) = 1$.
8. $(\csc A - \cot A)(\csc A + \cot A) = 1$.
9. $\sec^2 A + \sec^2 A \tan^2 A = \sec^4 A$.
10. $\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A \cos^2 A = \operatorname{sen}^4 A$.
11. $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$.
12. $\csc^2 A + \cot^2 A \csc^2 A = \csc^4 A$.

13. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \cos A}$.
14. $\dfrac{1 + \csc A}{\cot A} - \dfrac{\cot A}{\csc A} = \dfrac{1 + \csc A}{\cot A \csc A}$.
15. $\dfrac{1 - \tan A}{\sec A} + \dfrac{\sec A}{\tan A} = \dfrac{1 + \tan A}{\sec A \tan A}$.
16. $\dfrac{\tan A}{\sec A} - \dfrac{\sec A - \cos A}{\tan A} = 0$.
17. $\dfrac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} + \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} = 2\csc A$.
18. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \dfrac{1 + \cos A}{\operatorname{sen} A} = 0$.
19. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 + \sec A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \sec A} = 2\cot A$.
20. $\dfrac{\tan A}{\csc A - \cot A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\csc A + \cot A} = \sec A + \cos A$.
21. $\csc^4 A - \cot^4 A = \csc^2 A + \cot^2 A$.
22. $\cos^4 A - \cos^2 A \operatorname{sen}^2 A - 2\operatorname{sen}^4 A = \cos^2 A - 2\operatorname{sen}^2 A$.
23. $1 - 2\cos^2 A + \cos^4 A = \operatorname{sen}^4 A$.
24. $\sec^4 A - 2\sec^2 A \tan^2 A + \tan^4 A = 1$.
25. $\dfrac{\tan A + \sec^3 A - \sec A}{\sec A} = \tan^2 A + \operatorname{sen} A$.
26. $\dfrac{\cos A + \operatorname{sen}^3 A - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} = \cot A - \cos^2 A$.
27. $\dfrac{1 - \csc A \sec^3 A + \sec A \csc A}{\csc A} = \operatorname{sen} A - \tan^2 A \sec A$.
28. $\dfrac{1 + \tan A \operatorname{sen}^2 A - \tan A}{\operatorname{sen} A} = \csc A - \cos A$.
29. $\dfrac{\cos^3 A - \cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A} = \tan A - \operatorname{sen}^2 A$.
30. $\dfrac{\cos A + \operatorname{sen} A \cot A}{\cot A} = 2\operatorname{sen} A$.
31. $\dfrac{\cos A \tan A + \operatorname{sen} A}{\tan A} = 2\cos A$.
32. $\dfrac{\tan A - \tan^2 A + \sec^2 A}{\sec A} = \operatorname{sen} A + \cos A$.

33. $\dfrac{1}{1+\text{sen}\,x} = \dfrac{1-\text{sen}\,x}{\cos^2 x}.$

34. $\dfrac{\tan x\,\text{sen}\,x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\cos x}.$

35. $\dfrac{\text{sen}\,x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x}.$

36. $\dfrac{\text{sen}\,x}{\csc x - 1} = \dfrac{1+\text{sen}\,x}{\cot^2 x}.$

37. $\dfrac{\cos x(1+\text{sen}\,x) + 1 - \text{sen}\,x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1-\text{sen}\,x} + \dfrac{1}{1+\text{sen}\,x}.$

38. $\dfrac{\cot x - \tan x}{1-\tan x} = \cot x + 1.$

39. $\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{\text{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\cot x}{1-\cot^2 x}.$

40. $\dfrac{\text{sen}^2 x}{\sec x - 1} = \dfrac{\cos x + 1}{\sec x}.$

41. $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \tan x = \sec x.$

42. $\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x} + \cot x = \csc x.$

43. $\dfrac{\text{sen}\,x\tan x}{\csc x - \cot x} - \text{sen}\,x = \tan x.$

44. $\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{1-\cos x} - \cot x = \csc x - \text{sen}\,x.$

45. $\dfrac{\csc^4 y - 1}{\cot^2 y} = \csc^2 y + 1.$

46. $\dfrac{1+3\cos y}{1+\cos y} = \dfrac{1+2\cos y - 3\cos^2 y}{\text{sen}^2 y}.$

47. $\dfrac{2\cos^4 y + \text{sen}^2 y\cos^2 y - \text{sen}^4 y}{3\cos^2 y - 1} = 1.$

48. $\dfrac{1+\tan^2 y}{\sec^2 y(\text{sen}\,y + \cos y)} = \dfrac{\sec y}{1+\tan y}.$

49. $\dfrac{2\,\text{sen}\,y\cos y(1+\text{sen}\,y) + \cos^3 y}{1+\text{sen}\,y} = \dfrac{1+\text{sen}\,y}{\sec y}.$

50. $\dfrac{1-3\,\text{sen}\,y - 4\,\text{sen}^2 y}{\cos^2 y} = \dfrac{1-4\,\text{sen}\,y}{1-\text{sen}\,y}.$

51. $\dfrac{\text{sen}^3 y + \cos^3 y}{2\,\text{sen}^2 y - 1} = \dfrac{\sec y - \text{sen}\,y}{\tan y - 1}.$

52. $\dfrac{2\,\text{sen}^2 y + 3\,\text{sen}\,y - 2}{\text{sen}\,y + 2} = \dfrac{(2\,\text{sen}\,y - 1)\cos y}{\text{sen}\,y\cot y}.$

53. $\dfrac{1+\cos y}{1-\cos y} - \dfrac{\csc y - \cot y}{\csc y + \cot y} = 4\cot y\csc y.$

54. $\dfrac{1+\text{sen}\,y}{1-\text{sen}\,y} - \dfrac{\sec y - \tan y}{\sec y + \tan y} = \dfrac{4\csc y}{\csc^2 y - 1}.$

55. $\dfrac{2\tan y}{1-\tan^2 y} + \dfrac{1}{2\cos^2 y - 1} = \dfrac{\cos y + \text{sen}\,y}{\cos y - \text{sen}\,y}.$

56. $\dfrac{\tan^3 y + \text{sen}\,y\sec y - \text{sen}\,y\cos y}{\sec y - \cos y} = \text{sen}\,y + \tan y\sec y.$

$\text{sen}\,y + \dfrac{\text{sen}\,y}{\cos^2 y}$

57. $\dfrac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B} = \dfrac{\text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B - \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B}.$

58. $\dfrac{(\text{sen}\,A + \cos B)^2 + (\cos A - \text{sen}\,B)(\cos A + \text{sen}\,B)}{\text{sen}\,A + \cos B} = 2\cos B.$

59. $\dfrac{\tan B(\text{sen}\,A - \cos B) + \text{sen}\,B(1+\cos A\sec B)}{\text{sen}\,A + \cos A} = \tan B.$

60. $(\text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B)(\cos A\cos B + \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B) = \text{sen}\,A\cos A + \text{sen}\,B\cos B.$

61. $\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}.$

Nota: El signo más se aplica si θ está en el primero o segundo cuadrante y el signo menos si θ está en el tercero o cuarto cuadrante.

62. $\pm\sqrt{\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}} = \sec\theta + \tan\theta.$

Nota: El signo más se aplica si θ está en el primero o segundo cuadrante y el signo menos si θ está en el tercero o cuarto cuadrante.

63. $\pm\sqrt{\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} = \dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}.$

Notas El signo más se aplica si θ está en el primero o cuarto cuadrante y el signo menos si θ está en el segundo o tercer cuadrante.

64. $\pm\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,\theta}{1-\text{sen}\,\theta}} = \sec\theta + \tan\theta.$

Nota: El signo más se aplica si θ está en el primero o segundo cuadrante y el signo menos si θ está en el tercero o cuarto cuadrante.