

APUNTES DE RADICALES

Extracción de factores en un radical

Se descompone el radicando en factores. Si:

1 Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente se **deja en el radicando**.

Ejemplo:

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

Ejemplo:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

3 Un exponente **es mayor que el índice**, se **divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

Ejemplos:

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2} \\ 0 \ 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3 \sqrt[3]{3^2}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ 2 \ 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Introducción de factores en un radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Ejemplos:

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6}$$

$$= \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Suma ó Resta

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a \sqrt[n]{k} + b \sqrt[n]{k} + c \sqrt[n]{k} = (a+b+c) \sqrt[n]{k}$$

Multiplicación de Radicales

Radicales del mismo índice

Para **multiplicar** radicales con el mismo índice se **multiplican los radicandos** y se **deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **extraeremos factores del radical**, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se multiplican**.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$$

$${}^{12}\sqrt{3^6} \cdot {}^{12}\sqrt{(3^2)^4} \cdot {}^{12}\sqrt{(3^3)^3} = {}^{12}\sqrt{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = {}^{12}\sqrt{3^{23}} = 3 \cdot {}^{12}\sqrt{3^{11}}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$$

$$m.c.m.(2, 3) = 6$$

$${}^6\sqrt{12^3} \cdot {}^6\sqrt{36^2} = {}^6\sqrt{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = {}^6\sqrt{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = {}^6\sqrt{2^{10} \cdot 3^7} = 6 \cdot {}^6\sqrt{2^4 \cdot 3}$$

Cociente o División de Radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se dividen.**

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **simplificaremos el radical**, si es posible.

Ejemplos:

$$\boxed{1} \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2 \sqrt[3]{2^2} = 4 \sqrt[3]{4}$$

Potencia de radicales

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$\boxed{1} \quad (\sqrt[3]{18})^2 =$$

$$(\sqrt[3]{18})^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{(2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3 \sqrt[3]{12}$$

$$\boxed{2} \quad \left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}} \right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}} \right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18 \sqrt[6]{\frac{(2^8 \cdot 3^4)^2}{(2^4 \cdot 3^4)^3}} = 18 \sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18 \sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18 \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18 \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Raíz de un radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplos:

$$\boxed{1} \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\boxed{2} \sqrt{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} =$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4 \sqrt[4]{2}}} = \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4} \cdot 2}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}} \cdot 2}} = \sqrt[24]{2^{17}} \end{aligned}$$

Racionalización de radicales

La **racionalización de radicales** consiste en **quitar los radicales del denominador**, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos:

$$\boxed{1} \text{ Racionalización del tipo } \frac{a}{b\sqrt{c}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por \sqrt{c} .

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

1

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

2

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

2 **Racionalización del tipo** $\frac{a}{b \sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b \sqrt[n]{c^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \sqrt[n]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3 \sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3 \sqrt[5]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3 \sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \sqrt[5]{8}}{3 \sqrt[5]{2^5}} = \frac{2 \sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3 Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical**.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a + b \rightarrow a - b$$

$$-a + b \rightarrow -a - b$$

$$a - b \rightarrow a + b$$

$$-a - b \rightarrow -a + b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{1} \quad \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2}) \cdot (4+2\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2}) \cdot (4+2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (4+2\sqrt{2})}{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (4+2\sqrt{2})}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot (4+2\sqrt{2})}{8} = \frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6}) \cdot (5+2\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$